Curso de Física Estatística

5^a Lista - 1^0 semestre 2012

Prof. Anna Chame

- (Reif 9.1) Considere um sistema consistindo de duas partículas, cada uma delas podendo estar em qualquer um de três estados quânticos, associados a energias 0, ϵ e 3ϵ. O sistema está em contato com um reservatório térmico a temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$

  (a) Escreva uma expressão para a função de partição canônica Z se as partículas obedecem à estatítica clássica de MB e são consideradas distinguíveis.

  (b) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de BE ?

  (c) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de FD ?

- Mostre que o número de maneiras de distribuir N bósons idênticos em K estados é dado por

  $$I_B = \frac{(K+N-1)!}{(K-1)!N!}$$

  Para férmions, mostre que este número é dado por

  $$I_F = \frac{K!}{(K-N)!N!}$$

  $(N \leq K\ )$

- ($\sim$ Salinas 8.3) Mostre que um gás ideal de férmions, contido em um volume V, obedece à equação de estado :

  $PV = \frac{2U}{3}$

  Para isso:

  a) obtenha uma expressão para a pressão P, usando a conexão do ensemble grande canônico com a termodinâmica.

  b) Escreva uma expressão para a energia interna U como um somatório envolvendo os números de ocupação médios $< n_j >$ de cada nível de energia de partícula única ϵ_j.

  c) Desenvolva essas expressões. Para isso, no limite termodinâmico, transforme os somatórios em integrais em d^3k .

  d) Transforme as integrais em k em integrais na variável $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Compare-as e mostre que $PV = \frac{2U}{3}$

- Salinas 8.5 (Reif 9.4)

  a) Um gás ideal de N átomos de massa m está contido em um recipiente de volume V, a uma dada temperatura T. Calcule o potencial químico desse gás no limite clássico (sugestão: imponha que $N =< N >$ no formalismo do ensemble grande canônico, usando a expressão da grande função de partição no limite clássico)

  b) Considere agora um "gás bidimensional", constituído por N_A partículas livres adsorvidas sobre uma superfície de área A. A energia de uma partícula adsorvida é dada por

  $$\epsilon_A = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \epsilon_0$$

  onde $\vec{p}$ é o momento (bidimensional) e $\epsilon_0 > 0$ é a energia de ligação que mantém a partícula presa á superfície .

  No limite cássico, calcule o potencial químico μ_A do gás adsorvido .

  c) A condição de equilíbrio entre as partículas adsorvidas na superfície e as partículas do gás tridimensional pode ser expressa em termos dos respectivos potenciais químicos. Utilize essa condição para encontrar a densidade superficial de partículas adsorvidas em termos da temperatura e da pressão p exercida pelo gás envolvente.

- PROBLEMA EXTRA A SER ENTREGUE (Ver seção 9.3 Reif). Um gás ideal de N partículas idênticas, em um volume V, está em equilíbrio ‘a temperatura T. A energia total do sistema E é dada por $E = \sum_j n_j \epsilon_j$, onde n_j é o número de ocupação do estado de partícula única de energia ϵ_j. O número de partículas $N = \sum_j n_j$ é fixo. Usando o ensemble canônico, re-obtenha a expressão já conhecida para o valor médio $< n_j >$

  (a) se as partículas do gás forem férmions.

  (b) se as partículas do gás forem bósons.

$\Xi = \sum_j e^{-\beta E_j + \beta\mu N_j}$

$\Xi = \sum_{n_j} e^{-\beta \sum_j n_j \epsilon_j + \beta\mu \sum_j n_j}$

Para férmions(sinal +) ou bósons (sinal -):

$ln\Xi = \pm \sum_j ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)})$

$< n_j >= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} \pm 1}$

$\Phi = U - TS - \mu N = -k_B T ln\Xi = -PV$
$N =< N >= z \frac{\partial ln\Xi(\beta,z)}{\partial z}$
$U =< E >= -\frac{\partial ln\Xi(\beta,z)}{\partial \beta}$

Se $\epsilon_j = \epsilon_{(\vec{k},\sigma)} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ e gás em volume V,

$$\sum_j f(j) \to \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3k f(\vec{k})$$

$(\gamma = 2s + 1)$

No limite clássico,

$$ln\Xi_{cl} = \sum_j e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}$$

Para um gás ideal, no limite clássico:

$$ln\Xi_{cl} = \sum_{\vec{k},\sigma} e^{-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)}$$